# CHANGEMENT DE REFERENTIEL

**Cadre de l'étude** :

La vitesse et l'accélération d'un point dépendent du référentiel d'étude. Par exemple, la vitesse d'un passager assis dans un train sera nulle par rapport au référentiel du train mais non nulle par rapport au référentiel terrestre (vu par un observateur sur le quai).

L'objet de la partie I est d'établir le lien entre les vitesses et les accélérations dans deux référentiels différents (aspects cinématiques). Nous aborderons ensuite dans la partie II les conséquences dynamiques du problème de changement de référentiel.

## I. Aspects cinématiques du changement de référentiel

### 1) Préliminaires

#### *a) Formule de dérivation vectorielle*

Soient $R_1$ et $R_2$ deux référentiels quelconques en mouvement l'un par rapport à l'autre.
A chacun de ces référentiels est associé un repère :

- $R_1(O_1, \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$ avec $O_1$ point fixe de $R_1$ et $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$ base orthonormée fixe de $R_1$.
- $R_2(O_2, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$ avec $O_2$ point fixe de $R_2$ et $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$ base orthonormée fixe de $R_2$.

Soit $\vec{A}$ un vecteur quelconque (fonction du temps). Nous admettons qu'à chaque instant il existe un vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_{\mathrm{R_2/R_1}} = \vec{\Omega}_{2/1}$ tel que :

$$\boxed{\left(\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{A}}}{\mathbf{dt}}\right)_{\mathbf{R_1}} = \left(\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{A}}}{\mathbf{dt}}\right)_{\mathbf{R_2}} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{2/1}} \wedge \vec{\mathbf{A}} \quad \textbf{Formule de dérivation vectorielle}}$$

On peut aussi écrire : $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{R_2}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{R_1}} + \vec{\Omega}_{1/2} \wedge \vec{\mathrm{A}}$ d'où $\boxed{\vec{\Omega}_{2/1} = -\vec{\Omega}_{1/2}}$ avec $\vec{\Omega}_{2/1}$ vecteur rotation de $\mathrm{R_2}$ par raport à $\mathrm{R_1}$.

*Remarque :* On prend souvent $\mathrm{R_1}$ comme **référentiel absolu** (**référentiel fixe**, exemple : quai du train) et $\mathrm{R_2}$ comme **référentiel relatif** (**référentiel mobile**, exemple : train). Cependant il faut garder à l'esprit que les deux référentiels ont des rôles symétriques et que le seul point important est l'existence d'un mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre.

#### *b) Lien avec le torseur cinématique d'entraînement en SI*

On peut lier le problème de changement de référentiel à l'étude du mouvement d'un solide effectuée dans le cours de sciences industrielles. En effet, le mouvement d'un solide est décrit par un torseur cinématique d'entraînement à savoir :

- la vitesse de l'un quelconque des points du solide ;
- le vecteur rotation du solide.

On peut donc décrire le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre par un torseur cinématique d'entrainement à savoir :

- la vitesse d'un point fixe du référentiel mobile par rapport au référentiel fixe (**point coïncident**) ;
- le vecteur rotation du référentiel mobile par rapport au référentiel fixe.

## 2) Loi de composition des vitesses

### *a) Vitesses d'un point dans deux référentiels*

Soit M un point quelconque (fonction du temps).

La vitesse de M dans $R_1$ est par définition $\vec{v}(M/R_1) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R_1}$.

A l'aide de la relation de Chasles il vient $\vec{v}(M/R_1) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{R_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{R_1}$ avec :

- par définition $\left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{v}(O_2/R_1)$ ;
- d'après la formule de dérivation vectorielle $\left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{R_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M} = \vec{v}(M/R_2) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$.

Par conséquent la relation entre la vitesse de M dans $R_1$ et celle dans $\mathrm{R}_2$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{v}(M/R_1) = \vec{v}(M/R_2) + \vec{v}(O_2/R_1) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}}}$$

En prenant arbitrairement $\mathrm{R}_1$ comme référentiel absolu et $\mathrm{R}_2$ comme référentiel relatif, la relation précédente s'écrit :

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}(O_2/R_1) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

où $\vec{v}_a(M)$ désigne **la vitesse absolue** de M dans $\mathrm{R}_1$ et $\vec{v}_r(M)$ **la vitesse relative** de M dans $\mathrm{R}_2$.

Quel sens physique donné au dernier terme $\vec{v}(O_2/R_1) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$ ?

### *b) Point coïncident et vitesse d'entrainement*

Soit **P un point fixe de $\mathbf{R_2}$** : $\vec{v}(P/R_2) = \vec{0}$.

**P coïncide avec M à l'instant t** : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}$ à l'instant t (où O est un point quelconque).

D'après la relation de composition des vitesses établie précédemment :

$\vec{v}(P/R_1) = \boldsymbol{\vec{v}(P/R_2)} + \vec{v}(O_2/R_1) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2\boldsymbol{P}} = \vec{\mathbf{0}} + \vec{v}(O_2/R_1) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2\boldsymbol{M}}$

> La vitesse dans $\mathrm{R}_1$ du point coïncident P (fixe dans $\mathrm{R}_2$ et confondu avec M à l'instant t) correspond à la **vitesse d'entrainement** en M de $\mathrm{R}_2$ par rapport à $\mathrm{R}_1$ : $\boldsymbol{\vec{v}(P/R_1) = \vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_2/R_1) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}}$

### *c) Loi de composition des vitesses*

En résumé la loi de composition des vitesses s'écrit : $\boxed{\boldsymbol{\vec{v}(M/R_1) = \vec{v}(M/R_2) + \vec{v}_e(M)}}$

En prenant $\mathrm{R}_1$ comme référentiel absolu et $\mathrm{R}_2$ comme référentiel relatif, la relation précédente s'écrit : $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) \ \rightarrow vitesse\ absolue = vitesse\ relative + vitesse\ d'entrainement.$

Remarque : C'est cette dernière relation qu'il faut mémoriser et non celle obtenue dans le premier paragraphe car comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, la détermination de $\vec{v}_e(M)$ est souvent simple dans certains cas particuliers.

### *d) Cas particuliers : Translation ou rotation uniforme autour d'un axe fixe*

- **$\mathbf{R_2}$ est en translation par rapport à $\mathbf{R_1}$**

Les vecteurs de la base liée à $\mathrm{R}_2$ garde une orientation constante par rapport à $\mathrm{R}_1$ : $\boxed{\vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{2/1}} = \vec{\mathbf{0}}}$

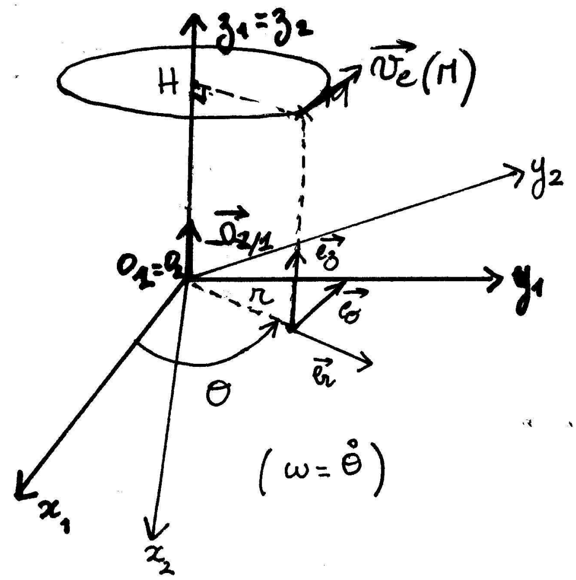
La vitesse d'entrainement est alors uniforme (indépendante du point M) et vérifie : $\boxed{\boldsymbol{\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_2/R_1)}}$

*Remarque :* Tous les points fixes de $\mathrm{R}_2$ ont la même vitesse par rapport à $\mathrm{R}_1$.

*ATTENTION* : Une translation n'est pas obligatoirement rectiligne.
*Exemples* : $\mathrm{R_1}$(référentiel terrestre) et $\mathrm{R_2}$(ascenseur, nacelle d'une grande roue)

- **$\mathbf{R_2}$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathbf{R_1}$**

$\mathrm{O_2}$ est fixe dans $\mathrm{R_1}$ : $\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O_2}/\boldsymbol{R_1}) = \vec{\mathbf{0}}}$
La vitesse d'entrainement vérifie alors : $\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{2/1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O_2M}}}$ avec $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{2/1}} = \overrightarrow{\boldsymbol{cste}}$ (uniforme)




En choisissant arbitrairement l'axe ($\mathrm{O_1z_1}$) comme axe de rotation confondu avec l'axe ($\mathrm{O_2z_2}$) on peut écrire : $\vec{\Omega}_{2/1} = \omega\vec{e}_{z_1} = \omega\vec{e}_{z_2} = \omega\vec{e}_z$ avec $\omega = cste$. $\overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_2H} + \overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation. La vitesse d'entrainement s'écrit :$\vec{v}_e(M) = \omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{HM}$.En travaillant en coordonnées cylindriques dans le base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ : $\overrightarrow{HM} = r\vec{e}_r$ d'où $\vec{v}_e(M) = r\omega\vec{e}_\theta$.

**Le point coïncident de M décrit dans $\mathbf{R_1}$ un cercle de centre H (projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation) à la vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ (mouvement circulaire uniforme).**

*Exemples* : $\mathrm{R_1}$(référentiel terrestre) et $\mathrm{R_2}$(manège)

## 3) Loi de composition des accélérations

### *a) Accélérations d'un point dans deux référentiels*

L'accélération de M dans $R_1$ est par définition $\vec{a}(M/R_1) = \left(\frac{d\vec{v}(M/R_1)}{dt}\right)_{R_1}$.
En utilisant la loi de composition des vitesses obtenue précédemment il vient :

$$\vec{a}(M/R_1) = \left(\frac{d\vec{v}(M/R_2)}{dt}\right)_{R_1} + \left(\frac{d\vec{v}(O_2/R_1)}{dt}\right)_{R_1} + \left(\frac{d(\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M})}{dt}\right)_{R_1}$$

Par définition : $\left(\frac{d\vec{v}(O_2/R_1)}{dt}\right)_{R_1} = \vec{a}(O_2/R_1)$
Dérivée d'un produit : $\left(\frac{d(\vec{\Omega}_{2/1}\wedge\overrightarrow{O_2M})}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\vec{\Omega}_{2/1}}{dt}\right)_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{R_1}$

D'après la formule de dérivation vectorielle :

- $\left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{R_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M} = \vec{v}(M/R_2) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$
- $\left(\frac{d\vec{v}(M/R_2)}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\vec{v}(M/R_2)}{dt}\right)_{R_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2) = \vec{a}(M/R_2) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2)$

En résumé $\vec{a}(M/R_1) = \vec{a}(M/R_2) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2) + \vec{a}(O_2/R_1) + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{2/1}}{dt}\right)_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \left[\vec{v}(M/R_2) + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right]$

soit en regroupant les termes égaux il vient la relation entre l'accélération de M dans $R_1$ et celle dans $R_2$ :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R_1}) = \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R_2}) + \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{O_2}/\boldsymbol{R_1}) + \left(\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{2/1}}}{\boldsymbol{dt}}\right)_{\boldsymbol{R_1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O_2M}} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{2/1}} \wedge \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{2/1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O_2M}}\right] + \ \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{2/1}} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R_2})}$$

En prenant arbitrairement $\mathrm{R}_1$ comme référentiel absolu et $\mathrm{R}_2$ comme référentiel relatif, la relation précédente s'écrit :

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}(O_2/R_1) + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{2/1}}{dt}\right)_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \left[\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right] + \ 2\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2)$$

où $\vec{a}_a(M)$ désigne **l'accélération absolue** de M dans $\mathrm{R}_1$ et $\vec{a}_r(M)$ **l'accélération relative** de M dans $\mathrm{R}_2$.

Quel sens physique donné aux autres termes ?

### *b) Accélération d'entrainement et de Coriolis*

Comme pour le cas de la vitesse, nous allons utiliser la notion de point coïncident P.
D'après la relation de composition des accélérations établie précédemment :

$$\vec{a}(P/R_1) = \boldsymbol{\vec{a}(P/R_2)} + \vec{a}(O_2/R_1) + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{2/1}}{dt}\right)_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2\boldsymbol{P}} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \left[\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2\boldsymbol{P}}\right] + \ 2\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \boldsymbol{\vec{v}(P/R_2)}$$

D'après les propriétés du point coïncident (fixe dans $\mathrm{R}_2$ et confondu avec M à l'instant t) il vient : $\vec{a}(P/R_1) = \vec{a}(O_2/R_1) + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{2/1}}{dt}\right)_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \left[\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right]$

L'accélération dans $\mathrm{R}_1$ du point coïncident P (fixe dans $\mathrm{R}_2$ et confondu avec M à l'instant t) correspond à **l'accélération d'entrainement** en M de $\mathrm{R}_2$ par rapport à $\mathrm{R}_1$ **:**

$$\boldsymbol{\vec{a}(P/R_1) = \vec{a}_e(M) = \vec{a}(O_2/R_1) + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{2/1}}{dt}\right)_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \left[\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right]}$$

*ATTENTION* : $\vec{a}_e(M)$ n'est pas la dérivée dans $\mathrm{R}_1$ de $\vec{v}_e(M)$.

On peut donc écrire la relation de composition des accélérations sous la forme :

$$\vec{a}(M/R_1) = \vec{a}(M/R_2) + \vec{a}_e(M) + \ 2\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2)$$

Le dernier terme de cette relation est lié au mouvement relatif de M dans $R_2$.

Il s'agit de **l'accélération de Coriolis** : $\boldsymbol{\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2)}$

*Remarque* : Dans le cas où M est immobile dans $R_2$ alors $\vec{a}_c(M) = \vec{0}$.

### *c) Loi de composition des accélérations*

En résumé la loi de composition des accélérations s'écrit : $\boxed{\boldsymbol{\vec{a}(M/R_1) = \vec{a}(M/R_2) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)}}$

En prenant $\mathrm{R}_1$ comme référentiel absolu et $\mathrm{R}_2$ comme référentiel relatif, la relation précédente s'écrit : $\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \ \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$
accélération $absolue$ = accélération $relative$ + accélération $d'entrainement$ + accélération d'Coriolis

Remarque : C'est cette dernière relation qu'il faut mémoriser et non celle obtenue dans le premier paragraphe car comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, la détermination de $\vec{a}_e(M)$ est souvent simple dans certains cas particuliers. Par contre **il faut connaître par cœur** l'expression de $\boldsymbol{\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2)}$.

### *d) Cas particuliers : Translation ou rotation uniforme autour d'un axe fixe*

- **$\mathbf{R_2}$ est en translation par rapport à $\mathbf{R_1}$**

La propriété $\boldsymbol{\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0}}$ entraine :

- $\boxed{\boldsymbol{\vec{a}_c(M) = \vec{0}}}$
- $\boxed{\boldsymbol{\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O_2/R_1)}}$

Comme pour la vitesse, l'accélération d'entrainement est alors uniforme (indépendante du point M).

- **$\mathrm{R_2}$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathrm{R_1}$**

$\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{O_2}/\boldsymbol{R_1}) = \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{2/1}} = \overrightarrow{\boldsymbol{cste}}$ entrainent $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{2/1}} \wedge \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{2/1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O_2 M}}\right]$.

On a vu précédemment (2.d) que **le point coïncident de M décrit dans $\mathbf{R_1}$ un cercle de centre H (projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation) à la vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ (mouvement circulaire uniforme).**

Ainsi la relation précédente devient dans la base cylindrique décrite précédemment :

$$\vec{a}_e(M) = \omega\vec{e}_z \wedge \left[\omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{HM}\right] = \omega\vec{e}_z \wedge [\omega\vec{e}_z \wedge r\vec{e}_r] = \omega\vec{e}_z \wedge r\omega\vec{e}_\theta = -r\omega^2\vec{e}_r$$

soit $\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{M}) = -\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{HM}}}$ l'accélération est centripète, caractéristique du mouvement circulaire uniforme.

---

# II. Aspects dynamiques du changement de référentiel

## 1) Relativité galiléenne et référentiels galiléens

### *a) Référentiels galiléens*

*RAPPEL chapitre 2 de mécanique* : La première loi de Newton définit un critère pour distinguer les référentiels dans lesquels les lois de la mécanique newtonienne s'expriment de la même manière. Ces référentiels sont appelés **référentiels galiléens**. C'est le principe de la relativité galiléenne qui postule que les lois de la dynamique sont les mêmes quel que soit le référentiel galiléen considéré. En d'autres termes, **le principe fondamental de la dynamique est invariant par changement de référentiel galiléen.**

En prenant **$\mathbf{R_1}$et $\mathbf{R_2}$ deux référentiels galiléens**, l'accélération d'un point matériel quelconque soumis à la résultante des forces $\vec{F}$ (indépendante du référentiel d'étude) vérifie : $\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R_1}) = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{m}} = \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R_2})$.

Or la loi de composition des accélérations pour $\mathrm{R_2}$ en mouvement quelconque par rapport $\mathrm{R_1}$ à s'écrit :

$$\vec{a}(M/R_1) = \vec{a}(M/R_2) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

Par conséquent pour $\mathrm{R_2}$ et $\mathrm{R_1}$ galiléens il vient : $\vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M) = \vec{a}_e(M) + 2\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2) = \vec{0}$.

Cette relation doit être vérifiée pour toute position et pour toute vitesse du point M ce qui se traduit par $\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0}$ et $\vec{a}_e(M) = \vec{0}$ soit $\vec{v}_e(M) = \overrightarrow{cste}$ : **$\mathbf{R_2}$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathbf{R_1}$**.

Ce constat justifie la remarque faite au chapitre 2 de mécanique : **Un référentiel animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui aussi galiléen.**

Il reste maintenant à trouver un référentiel galiléen de référence.

### *b) Caractère galiléen approché de quelques référentiels d'utilisation courante (Référentiels de Copernic, de Kepler, géocentrique et terrestre)*

Pour la définition des référentiels de Copernic, de Kepler et géocentrique voir *le chapitre 7 sur les forces centrales conservatives*.

- **Référentiel terrestre**

C'est le référentiel lié à la Terre de centre un point de la Terre et dont les axes ont des directions fixes par rapport à cette planète.

La plupart du temps, les observations expérimentales confirment les résultats trouvés par l'application du PFD pour l'étude des objets du quotidien.

Cependant, certaines observations, comme par exemple la rotation du plan d'oscillations du pendule de Foucault, contredisent les prévisions du PFD (mouvement du pendule dans un plan fixe). Dans ce cas, il faut considérer **le caractère non galiléen du référentiel terrestre en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique**.

- **Référentiel géocentrique**

Dans ce référentiel, on obtient une description correcte du mouvement du pendule de Foucault. De même, c'est dans ce référentiel que nous avons étudié le mouvement des satellites terrestres.
Cependant, le phénomène des marées ne peut s'expliquer qu'en prenant en compte **le caractère non galiléen du référentiel géocentrique en translation quasi-circulaire par rapport au référentiel héliocentrique.**

- **Référentiel de Kepler (ou héliocentrique)**

Ce référentiel sert à l'étude du mouvement des planètes du système solaire et permet de comprendre le phénomène des marées. Un référentiel aux propriétés très proches du référentiel de Kepler est le **référentiel de Copernic**.
En toute rigueur, ces deux référentiels ne sont pas galiléens car le système solaire appartient à une galaxie (la voir lactée) et est donc soumis à l'attraction gravitationnelle des autres étoiles de la galaxie (mouvement accéléré et non uniforme).

On peut continuer le raisonnement longtemps sans pouvoir trouver le référentiel galiléen de référence. **On considèrera donc un référentiel comme galiléen tant qu'on pourra appliquer les lois de Newton (en particulier le PFD) sans que les observations expérimentales n'infirment la théorie**. Dans ces conditions, les référentiels de Copernic et Kepler constituent la meilleure approximation de référentiel galiléen que l'on puisse considérer.

On voit qu'il est parfois nécessaire de prendre en compte le caractère non galiléen des référentiels d'utilisation courante (terrestre pour le pendule de Foucault, géocentrique pour le phénomène des marées). De même, dans le cas de mouvement du quotidien (passager d'une voiture), il est parfois intéressant de travailler dans un référentiel non galiléen (référentiel de la voiture, accéléré par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen dans les conditions d'observation). En effet on peut ainsi mettre en évidence la «force centrifuge » ressentie quand le conducteur aborde un virage.

Il s'agit donc dans les prochains paragraphes d'exprimer les lois de la mécanique (PFD, théorème du moment cinétique et de l'énergie cinétique) dans un référentiel non galiléen.

## 2) Expression du principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen

### *a) Notion de « forces d'inertie » (pseudo-forces)*

Soit $R_1$ un référentiel galiléen et $R_2$ un référentiel non galiléen. On considère un point matériel M de masse m soumis à la résultante des forces $\vec{F}$ (exemples : tension du fil, réaction du support, force de rappel d'un ressort...).
**Le principe fondamental de la dynamique** appliqué à M dans $\boldsymbol{R_1}$ **galiléen** s'écrit : $\boldsymbol{m\vec{a}(M/R_1) = \vec{F}}$
En utilisant la loi de composition des accélérations pour $\mathrm{R}_2$ en mouvement quelconque par rapport $\mathrm{R}_1$ il vient : $m[\vec{a}(M/R_2) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)] = \vec{F}$ soit $\boldsymbol{m\vec{a}(M/R_2) = \vec{F} - m\vec{a}_e(M) - m\vec{a}_c(M)}$.

**La correction du PFD dans $\boldsymbol{R_2}$ non galiléen** par rapport à $\boldsymbol{R_1}$ **galiléen** se fait par l'ajout de deux termes homogènes à des forces, appelés **forces d'inertie**. On notera :

- $\boldsymbol{\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M)}$ **: force d'inertie d'entrainement**
- $\boldsymbol{\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M) = -2m\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2)}$ **: force d'inertie de Coriolis**

> Par conséquent le **PFD dans un référentiel non galiléen** s'écrit : $\boldsymbol{m\vec{a}(M/R_2) = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}}$

*Remarques* :

- L'écriture du PFD dans un référentiel non galiléen nécessite la connaissance de son mouvement par rapport à un référentiel galiléen.
- Contrairement à la résultante des forces $\vec{F}$, les forces d'inertie $\vec{F}_{ie}$ *et* $\vec{F}_{ic}$ ne sont pas dues à des interactions mais résultent seulement du caractère non galiléen du référentiel d'étude, on parle de pseudo-forces. En effet si $R_2$ est galiléen alors il est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à $R_1$ galiléen d'où $\vec{a}_e(M) = \vec{0} = \vec{a}_c(M)$ soit $\vec{F}_{ie} = \vec{0} = \vec{F}_{ic}$ et $m\vec{a}(M/R_2) = \vec{F}$ : on retrouve l'invariance du PFD par changement de référentiel galiléen.

### b) Cas d'un référentiel en translation

**$R_2$ est en translation par rapport à $R_1$ galiléen.**
D'après les expressions des accélérations d'entrainement et de Coriolis obtenues au paragraphe I.3.d) il vient :

- $\boxed{\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M) = \vec{0}}$
- $\boxed{\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M) = -m\vec{a}(O_2/R_1)}$

*Exemples de force d'inertie d'entrainement* :

- C'est la force ressentie par le passager d'un véhicule lors d'une forte accélération : il semble « collé » au siège. Cette force ressentie est bien de sens contraire à celui de l'accélération du véhicule (signe -). Le référentiel du véhicule joue le rôle de $R_2$ non galiléen qui est en translation par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen ($R_1$). ANNEXE 1
- C'est la force qui permet d'expliquer le phénomène des marées du au caractère non galiléen du référentiel géocentrique ($R_2$) en translation par rapport au référentiel héliocentrique supposé galiléen ($R_1$). ANNEXE 2

### c) Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

**$R_2$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $R_1$ galiléen.**
D'après les expressions des accélérations d'entrainement et de Coriolis obtenues au paragraphe I.3.d) il vient :

- $\boxed{\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M) = -2m\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2)}$ **est nulle si M est immobile dans $R_2$ (cas statique).**
- $\boxed{\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M) = m\omega^2\overrightarrow{HM}}$ **force centrifuge.**

**Cas statique** : *Exemples de force d'inertie d'entrainement (car $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$)*

- C'est la force ressentie par le passager d'un véhicule qui prend un rond-point : il semble entrainé vers l'extérieur du rond-point. Il s'agit de la force centrifuge qui résulte du caractère non galiléen du véhicule ($R_2$) en rotation autour d'un axe fixe du référentiel terrestre supposé galiléen ($R_1$). ANNEXE 3
- Le fait que le référentiel terrestre *($R_2$) soit* en rotation uniforme autour d'un axe fixe du référentiel géocentrique ($R_1$) modifie le champ de pesanteur terrestre. ANNEXE 4

**Cas dynamique** : *Exemples de force d'inertie de Coriolis*

En dynamique terrestre ($R_2$) le PFD s'écrit *:* $m\vec{a}(M/R_2) = \vec{F}_a + m\vec{g} + \vec{F}_{ic}$ *avec* $\vec{F}_a$ *résultante des forces autres que gravitationnelles et* $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{v}(M/R_2)$ où $R_1$ est le référentiel géocentrique.

- La force de Coriolis est responsable de la déviation vers l'est des corps tombant en chute libre (maximale à l'équateur et nulle aux pôles). ANNEXE 5
- Cette force est à l'origine du sens de rotation des masses d'air qui dépend de l'hémisphère (Exemple d'un anticyclone : sens des aiguilles d'une montre au nord et sens contraire au sud). ANNEXE 6

- Cette force permet d'expliquer la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault (nulle à l'équateur et maximale aux pôles). ANNEXE 7

## 3) Théorème du moment cinétique et de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

### *a) Théorème du moment cinétique*

Soit $R_2$ un référentiel non galiléen et $O_2$ un point fixe de $R_2$. On considère un point matériel M de masse m soumis à la résultante des forces $\vec{F}$ (forces « vraies » et non d'inertie).

Le moment cinétique de M par rapport à $O_2$ dans le référentiel $R_2$ s'écrit : $\overrightarrow{L_{O_2}} = \overrightarrow{O_2M} \wedge \mathrm{m}\vec{v}(M/R_2)$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O_2}}}{\mathrm{dt}}\right)_{R_2} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_2M}}{\mathrm{dt}}\right)_{R_2} \wedge \mathrm{m}\vec{v}(M/R_2) + \overrightarrow{O_2M} \wedge \left(\frac{\mathrm{d}(\mathrm{m}\vec{v}(M/R_2))}{\mathrm{dt}}\right)_{R_2} = \vec{v}(M/R_2) \wedge \mathrm{m}\vec{v}(M/R_2) + \overrightarrow{O_2M} \wedge \mathrm{m}\vec{a}(M/R_2)$$

Or d'après II.2.a) le PFD dans un référentiel non galiléen s'écrit : $m\vec{a}(M/R_2) = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$ d'où la relation précédente devient : $\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O_2}}}{\mathrm{dt}}\right)_{R_2} = \overrightarrow{O_2M} \wedge \mathrm{m}\vec{a}(M/R_2) = \overrightarrow{O_2M} \wedge \left(\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}\right)$.

Par conséquent, le théorème du moment cinétique en un point fixe $O_2$ d'un référentiel **non galiléen** $R_2$ s'écrit : $\boldsymbol{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O_2}}}{\mathrm{dt}}\right)_{R_2} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{0_2}}(\vec{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{0_2}}(\vec{F}_{ie}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{0_2}}(\vec{F}_{ic})}$

### *b) Théorème de l'énergie cinétique*

En faisant le produit scalaire de la vitesse relative de M dans $R_2$ avec l'expression du PFD dans $R_2$ on obtient le théorème de la puissance cinétique dans un référentiel non galiléen (méthode employée dans le chapitre 3 de mécanique) :

$$\vec{v}(M/R_2).m\vec{a}(M/R_2) = \vec{v}(M/R_2).\left(\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}\right) \rightarrow \vec{v}(M/R_2).m\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M/R_2)}{\mathrm{dt}}\right)_{R_2} = \mathrm{P}_{R_2}(\vec{F}) + \mathrm{P}_{R_2}(\vec{F}_{ie}) + \mathrm{P}_{R_2}(\vec{F}_{ic})$$

$$\rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}\mathrm{m}v^2(M/R_2))}{\mathrm{dt}}\right)_{R_2} = \mathrm{P}_{R_2}(\vec{F}) + \mathrm{P}_{R_2}(\vec{F}_{ie}) + \mathrm{P}_{R_2}(\vec{F}_{ic})$$

Comme $\vec{F}_{ic} = -2\mathrm{m}\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{\mathrm{v}}(\mathrm{M/R_2})$ est perpendiculaire à $\vec{v}(M/R_2)$, la puissance dans $R_2$ de la force d'inertie de Coriolis est toujours nulle : $\mathrm{P}_{R_2}\left(\vec{F}_{ic}\right) = \vec{v}(M/R_2).\vec{F}_{ic} = 0$. **On dit que la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas dans $\boldsymbol{R_2}$.**

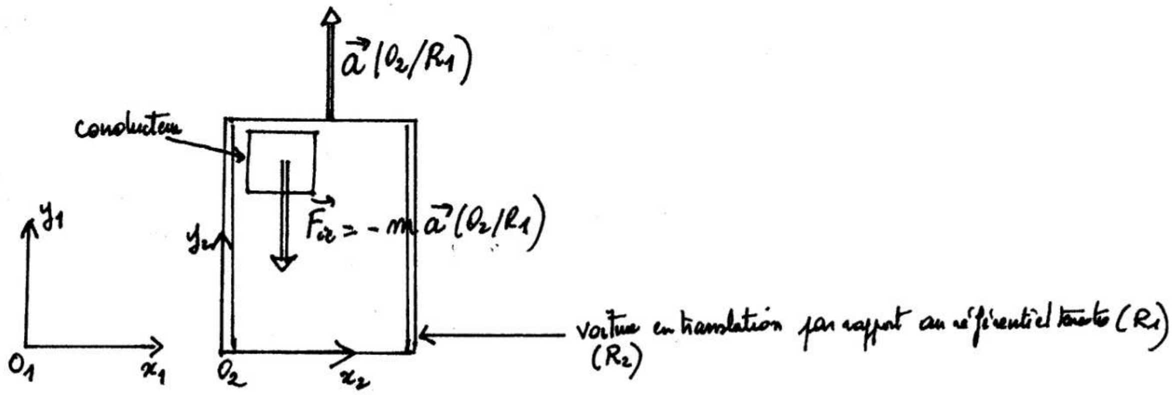
En notant $E_C(M/R_2) = \frac{1}{2}\mathrm{m}v^2(M/R_2)$ l'énergie cinétique de M dans $R_2$ on obtient le <u>théorème de la puissance cinétique</u> dans un référentiel **non galiléen** : $\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}E_C(M/R_2)}{\mathrm{dt}} = \mathrm{P}_{R_2}(\vec{F}) + \mathrm{P}_{R_2}(\vec{F}_{ie})}$ **avec** $\boldsymbol{\mathrm{P}_{R_2}\left(\vec{F}_{ic}\right) = 0}$

On déduit de la relation précédente <u>le théorème de l'énergie cinétique</u> : $\boldsymbol{\mathrm{d}E_C(M/R_2) = \delta W_{R_2}(\vec{F}) + \delta W_{R_2}(\vec{F}_{ie})}$
(δW : travail élémentaire) qui peut aussi s'écrire par intégration entre deux instants donnés du mouvement :
$\boldsymbol{\Delta E_C(M/R_2) = W_{R_2}(\vec{F}) + W_{R_2}(\vec{F}_{ie})}$ (W : travail fini)

# ANNEXES

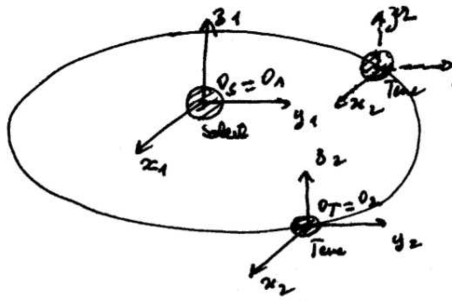
## • REFERENTIEL EN TRANSLATION

ANNEXE 1 :




---

ANNEXE 2 :




. Terre $(R_2)$ en translation par rapport au soleil $(R_1)$ $\begin{cases} R_1 \text{ galiléen} \\ R_2 \text{ non galiléen} \end{cases}$

. On étudie un volume d'eau (masse m, assimilé à un point matériel M) à la surface immergée de la Terre.

• Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans le référentiel géocentrique $(R_2)$ s'écrit :

$$m\vec{a}(M/R_2) = m\left(\vec{G_T}(M) + \vec{G_L}(M) + \vec{G_S}(M)\right) + \vec{F_{ie}}$$

– $\vec{G_T}(M)$ représente le champ gravitationnel s'exerçant sur M de la part de la Terre : $\vec{G_T} = -\frac{GM_T}{O_TM^3}\vec{O_TM}$

($\vec{G_L}(M)$ pour la lune et $\vec{G_S}(M)$ pour le soleil)

– $\vec{F_{ie}}$ correspond à la force d'inertie d'entraînement due au caractère non galiléen du référentiel géocentrique : $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a}(O_T/R_1)$

($\vec{v}(M/R_2) = \vec{0}$ masse d'eau supposée immobile par rapport à la Terre : $\vec{F_{ic}} = \vec{0}$)

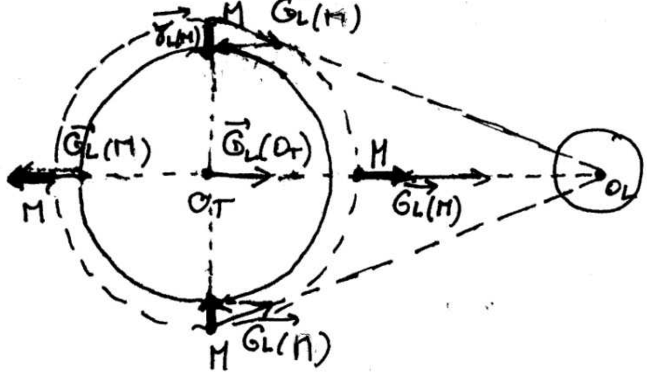
• Le PFD appliqué à la Terre dans le référentiel héliocentrique $(R_1)$ s'écrit :

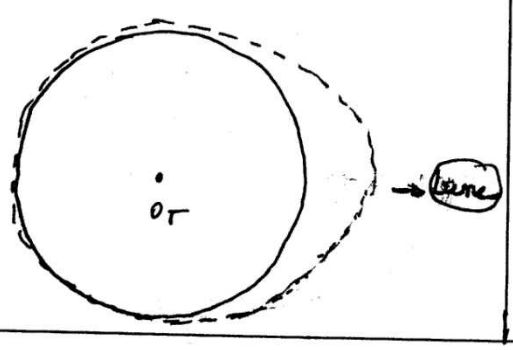
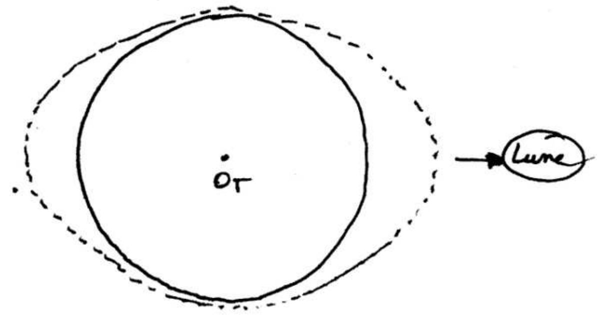
$$M_T\vec{a}(O_T/R_1) = M_T\left(\vec{G_S}(O_T) + \vec{G_L}(O_T)\right)$$

Ainsi le PFD appliqué à M dans $R_2$ devient :

$$\vec{a}(M/R_2) = \vec{G_T}(M) + \underbrace{\left[\overbrace{\vec{G_L}(M) - \vec{G_L}(O_T)}^{\text{influence de la Lune}} + \overbrace{\vec{G_S}(M) - \vec{G_S}(O_T)}^{\text{influence du Soleil}}\right]}_{\text{termes différentiels de marée}}$$

Voyons sur un schéma l'effet de la lune   On note $\vec{\gamma_L}(M) = \vec{G_L}(M) - \vec{G_L}(O_T)$ champ différentiel de marée

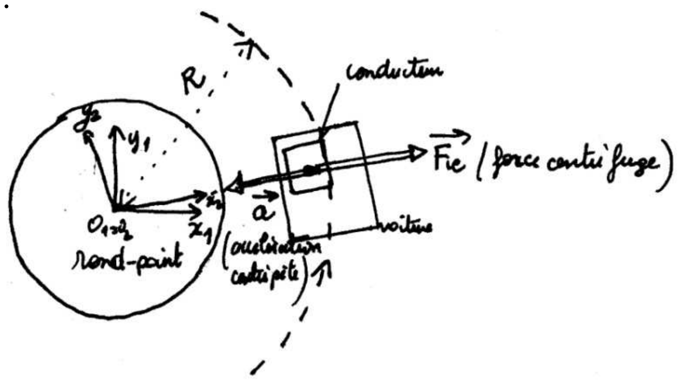



| En ne prenant pas en compte le caractère non galiléen du référentiel géocentrique | En prenant en compte le caractère non galiléen du référentiel géocentrique (Tiré de le PFD et apparition de $\vec{G_L}$) |
|---|---|
| Absence de $\vec{G_L}(O_T)$ | Présence de $\vec{G_L}(O_T)$ |
|  |  |

- **REFERENTIEL EN ROTATION UNIFORME**

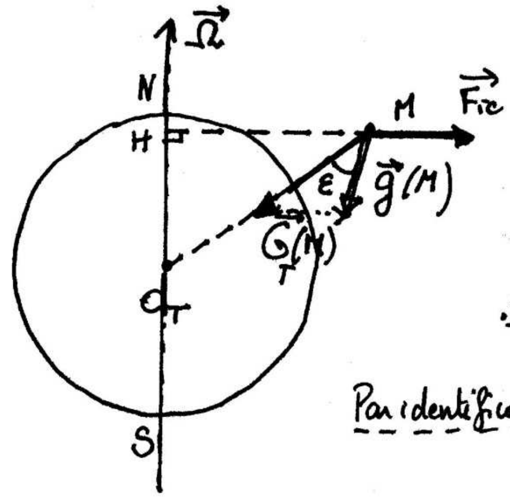
## ***Cas statique :***

ANNEXE 3 :




---

ANNEXE 4 :




- Soit un point matériel M de masse m en équilibre dans le référentiel terrestre (non galiléen / référentiel géocentrique supposé galiléen) accroché au bout d'un fil (pendule par exemple)

- Le PFD appliqué à M dans le référentiel terrestre s'écrit :

$$\vec{0} = \vec{T}_{fil} + m\,\vec{G_T}(M) + \vec{F_{ie}}$$

- Habituellement l'équilibre s'écrit $\vec{0} = \vec{T}_{fil} + \vec{P}$ poids de M ($\vec{P} = m\vec{g}$)

Par identification : $\vec{P} = m\,\vec{G_T}(M) + \vec{F_{ie}}$

attraction gravitationnelle

force d'inertie d'entraînement due au caractère non galiléen du référentiel terrestre

- Comme le référentiel terrestre est en rotation ($\vec{\Omega} = \omega\,\vec{u}_{S\to N}$) par rapport au référentiel géocentrique :

$$\vec{F_{ie}} = -m\vec{a}_e = m\omega^2\vec{HM}$$ (avec H projeté orthogonal de M sur l'axe SUD⟺NORD)

- Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est donc modifié par la rotation de la Terre :

$$\boxed{\vec{g}(M) = \vec{G_T}(M) + m\omega^2\vec{HM}}$$ ($\vec{g}$ indique la verticale)

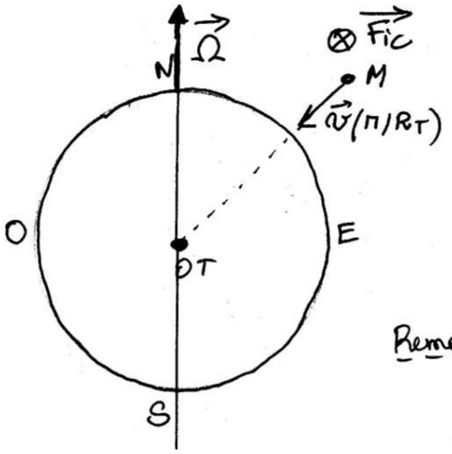
- $\vec{G_T}(M)$ : dépend de l'altitude
- $m\omega^2\vec{HM}$ : dépend de la latitude (nulle aux pôles, maximale à l'équateur)

(influence très faible : $\varepsilon \simeq 0{,}1°$ au maximum)

---

## ***Cas dynamique :***

ANNEXE 5 :



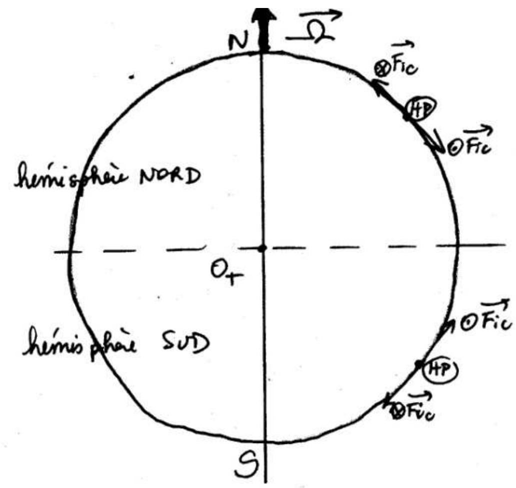

• Soit un point matériel en chute libre dans le référentiel terrestre ($R_T$) non galiléen

• Le PFD dans $R_T$ s'écrit : $\vec{a}(M/R_T) = \vec{P} + \vec{F_{ic}}$

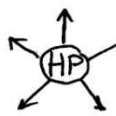
avec $\vec{F_{ic}} = -m\vec{a_c} = -2m\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/R_T)$ qui dévie la trajectoire de M vers l'Est.

Remarque : Aux pôles $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{\Omega}$ donc $\vec{F_{ic}} = \vec{0}$

ANNEXE 6 :

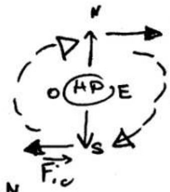



• Anticyclone (zone de haute pression (HP))



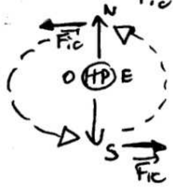

↑ déplacement des masses d'air

* hémisphère NORD :




rotation des masses d'air dans le sens horaire

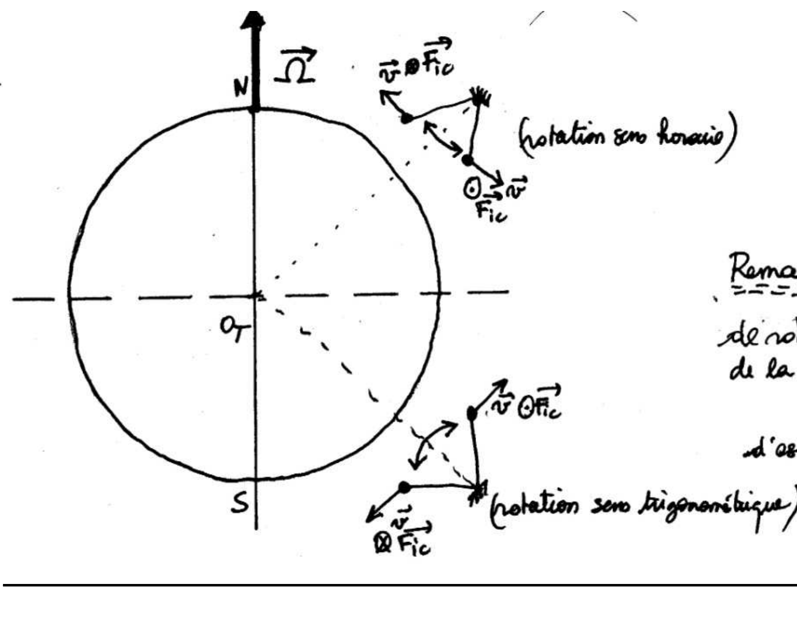
* hémisphère SUD :




rotation des masses d'air dans le sens trigonométrique

Remarque : Dans le cas d'un cyclone (zone de basse pression), le sens de rotation est inversé.

ANNEXE 7 :




Remarque : . Aux pôles : $\vec{v} \perp \vec{\Omega}$ : la période de rotation du plan du pendule est égale à celle de la Terre.

. A l'équateur : $\vec{v} \,//\, \vec{\Omega}$ : le plan d'oscillations du pendule reste fixe.